4/12/2019

• χ_n^2

• <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>:

Έστω $Z_1, Z_2, \dots Z_n$ ανεξάρτητες και κανονικές τ.μ. που ακολουθούν $Z_i \sim N(0,1)$

$$\chi_n^2 = \underbrace{Z_1^2}_{\sim \chi_1^2} + \underbrace{Z_2^2}_{\sim \chi_1^2} + \dots + \underbrace{Z_n^2}_{\sim \chi_1^2}$$

Εμείς θ.δ.ο. $\chi_n^2 \equiv \Gamma\acute{\alpha}\mu\mu\alpha(n/2, 2)$

Προσδιορίζω τη ροπογεννήτρια της χ_n^2

$$m_{\chi_n^2}(t) \overset{\text{ορ}}{=} E(e^{t\chi_n^2}) \overset{\text{ορ}}{=} E\left(e^{t(Z_1^2+Z_2^2+\dots+Z_n^2)}\right) =$$

$$= E\left(e^{tZ_1^2}\cdot e^{tZ_2^2}\cdot\ldots\cdot e^{tZ_n^2}\right)$$

$$\overset{\text{ανεξ.}}{=} E(e^{tZ_1^2})\cdot E(e^{tZ_2^2})\cdot\ldots\cdot E(e^{tZ_n^2})$$

$$\overset{\text{ισον.}}{=} \left(E(e^{tZ^2})\right)^n \quad \text{όπου} \quad Z\sim N(0,1)$$

$$E(e^{tZ^2}) \underset{\text{γιατί} \sim N(0,1)}{\overset{Z:\ \text{συνεχής}}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz^2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty}(2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}z^2+tz^2}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\frac{1}{(\sigma^2)^{-1/2}} e^{-\frac{1}{2}z^2[1-2t]}\,dz =$$

$\frac{1}{\sigma^2}=1-2t$

όπου $1-2t>0$

αφού είναι διακύμανση

$$= \frac{1}{(\sigma^2)^{-1/2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}z^2}\,dz$$

όπου $\frac{1}{\sigma^2}=1-2t$ με την υπόθεση ότι $1-2t>0$

Άρα: $E(e^{tZ^2}) = (1-2t)^{-1/2} \quad t<\frac{1}{2}$

Άρα: $m_{\chi_n^2}(t) = \left[(1-2t)^{-1/2}\right]^n = (1-2t)^{-n/2} \quad t<\frac{1}{2}$

Συμπίπτει με τη ροπ/τρια της Γάμμα κατανομής: $(1-\theta t)^{\alpha}$, $t<1/\theta$

Άρα Γάμμα $(n/2, 2)$

- **Πόρισμα**

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η μέση τιμή: $E(\chi_n^2)=n$ και η διακύμανση $Var\,\chi_n^2=2n$

• t_n

• ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω Z τ.μ. που ακολουθεί $N(0,1)$ και S_n τ.μ. που ακολουθεί χ^2_n. Υποθέτουμε ότι οι τ.μ. Z και S_n είναι ανεξάρτητες. Τότε λέμε ότι

η τ.μ. $T_n = \dfrac{Z}{\sqrt{S_n/n}} \sim t_n$

Θέλουμε να βρούμε την σ.π.π.:

$$\left.\begin{aligned} T_n &= \frac{Z}{\sqrt{S_n/n}} \\ U &= S_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} S_n &= u \\ Z &= T_n \sqrt{\frac{u}{n}} \end{aligned}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ & \sqrt{\frac{u}{n}} \end{vmatrix} = \left(\frac{u}{n}\right)^{1/2} \neq 0$$

$$f_{Z,S}(z,s) \overset{Z,S \text{ ανεξ.}}{=\!=\!=} f_Z(z)\cdot f_S(s) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}z^2} \cdot \frac{s^{n/2-1} e^{-s/2}}{2^{n/2}\cdot\Gamma(n/2)}, \ z\in\mathbb{R}$$

$s \geq 0$.

$$f_{T,U}(t,u) = f_{Z,S}\left(t\left(\frac{u}{n}\right)^{1/2}, u\right)\cdot\left(\frac{u}{n}\right)^{1/2} = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2 u}{n}} \cdot \frac{u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{1}{2}}}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})\, n^{1/2}}$$

$$= \frac{2^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \pi^{-1/2} \cdot u^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-1}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2 u}{n} - \frac{u}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})\, n^{1/2}}, \quad u\geq 0 \quad t\in\mathbb{R}$$

Περιθώρια:

$$f_T(t) = \frac{2^{-\frac{n+1}{2}} \pi^{-1/2}}{\Gamma(n/2)\, n^{1/2}} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{n}+1\right]u}}_{(*)} du$$

(*) Παρατηρώ ότι μοιάζει με την Γάμμα κατανομή όπου

$$\alpha = \frac{n+1}{2} \quad , \quad \beta = \left[\frac{t^2}{2n} + \frac{1}{2}\right]^{-1}$$

Άρα:

$$f_T(t) = \frac{2^{-\frac{n+1}{2}} \pi^{-1/2}}{\Gamma(n/2)\, n^{1/2}} \cdot \left[\frac{t^2}{2n} + \frac{1}{2}\right]^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

- $F_{n,k}$

- <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Έστω S_n, S_k δύο ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες ακολουθούν χ_n^2 και χ_k^2 αντίστοιχα. Τότε λέμε ότι η τ.μ.

$$\omega = \frac{S_n/n}{S_k/k} \sim F_{n,k} \qquad \omega = \frac{k}{n} \cdot \frac{S_n}{S_k}$$

Θέλουμε να βρούμε την σππ:

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \frac{k}{n}\frac{S_n}{S_k} \\ u = S_k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S_k = u \\ S_n = u \cdot \omega \cdot \frac{n}{k} \end{array}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ & u\frac{k}{n} \end{vmatrix} = u \cdot \frac{n}{k} \neq 0$$

$$f_{S_n,S_k}(s_n,s_k) \overset{\text{ανεξ.}}{=} f_{S_n}(s_n)\cdot f_{S_k}(s_k) = \frac{s_n^{\frac{n}{2}-1} e^{-s_n/2}}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{s_k^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{s_k}{2}}}{2^{k/2}\,\Gamma(k/2)}$$

$s_n, s_k > 0$

$$f_{w,u}(w,u) = f_{S_n,S_k}\left(uw\frac{n}{k}, u\right)\cdot u\frac{n}{k} =$$

$$= \frac{u^{\frac{n}{2}-1}\, w^{\frac{n}{2}-1}\, n^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(n/2)\, k^{\frac{n}{2}-1}} \cdot e^{-\frac{uwn}{k\cdot 2}} \cdot \frac{u^{\frac{k}{2}-1}\cdot e^{-\frac{u}{2}}\cdot u n}{2^{k/2}\,\Gamma(k/2)\cdot k} \qquad u\geq 0,\ w\geq 0$$

$$f_w(w) = \frac{w^{\frac{n}{2}-1}\, n^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n+k}{2}}\,\Gamma(n/2)\,\Gamma(k/2)\,k^{n/2}} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{\frac{n+k}{2}-1} e^{-u\left[\frac{wn}{2k}+\frac{1}{2}\right]}}_{(*)} du$$

(*) Γάμμα $\left(a = \frac{n+k}{2},\ b = \frac{wn}{2k} + \frac{1}{2}\right)$ μοιάζει

Άρα:

$$f_w(w) = \frac{w^{\frac{n}{2}-1}\, n^{\frac{n}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)\left[\frac{wn}{2k}+\frac{1}{2}\right]^{-\frac{n+k}{2}}}{k^{n/2}\, 2^{\frac{n+k}{2}}\,\Gamma(n/2)\,\Gamma(k/2)}, \quad w\geq 0$$

ΑΣΚΗΣΗ (Η/Ω)

Αν $X \sim F_{n,k}$ νδο $\frac{1}{X} \sim F_{k,n}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

$E(T_n) = 0$, $n>1$ για $n\leq 1$ δεν ορίζεται η μέση τιμή

$Var(T_n) = \frac{n}{n-2}$, $n>2$ για $n\leq 2$ δεν ορίζεται διακύμανση.

Ασκηση 4.7

U, V ανεξάρτητες με Γαμμα(α,1) και Γαμμα(β,1) αντίστοιχα

α) $X = U+V$ β) $X = U+V$

$Y = U-V$

ΛΥΣΗ

U, V ανεξάρτητες $\Rightarrow f_{U,V}(u,v) = f_U(u)\cdot f_V(v) =$

$$= \frac{u^{\alpha-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{v^{\beta-1} e^{-v}}{\Gamma(\beta)}, \quad u \geq 0 \quad v \geq 0$$

β) $\left.\begin{array}{l} X = U+V \\ Y = U-V \end{array}\right\} \Rightarrow u = \frac{x+y}{2}$

$v = \frac{x-y}{2}$

$$J = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{U,V}(u,v)\cdot|J| = f_{U,V}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{x+y}{2}}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\left(\frac{x-y}{2}\right)^{\beta-1} e^{-\frac{x-y}{2}}}{\Gamma(\beta)}$$

με ΠΟ $\left.\begin{array}{l} \frac{x+y}{2} \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0 \\ \frac{x-y}{2} \geq 0 \Rightarrow x-y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -x \leq y \leq x \\ x \geq 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{array}$

$1^{ος}$ Τρόπος

$$f_X(x) = \underbrace{\frac{e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) 2^{\alpha-1} 2^{\beta-1}}}_{=c(x)} \cdot \int_{-x}^{x} (x+y)^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} dy =$$

y	$z=y+x$
$-x$	0
x	$2x$

$$\overset{z=y+x}{=} c(x) \int_0^{2x} z^{\alpha-1} [2x-z]^{\beta-1} dz$$

$$x-y = x-(z-x) = 2x-z$$

$$\overset{z=2x\omega}{=} c(x) \int_0^1 (2x\omega)^{\alpha-1} [2x-2x\omega]^{\beta-1} 2x\, d\omega$$

z	$\omega=\frac{z}{2x}$
0	0
$2x$	1

Άρα $f_X(x) = c(x)(2x)^{\alpha-1}(2x)^{\beta-1}(2x) \cdot$

$$\cdot \int_0^1 \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1} d\omega =$$

$$= c(x)(2x)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta), \quad x \geq 0$$

$$dz = 2x\, d\omega$$

Με την αντικατάσταση έχω Γάμμα $(\alpha+\beta, 1)$

$2^{ος}$ Τρόπος

$$m_X(t) \overset{ορ}{=} E(e^{t(u+v)}) = E(e^{tu} e^{tv}) \overset{ανεξ}{=} E(e^{tu}) E(e^{tv}) =$$

$$= m_u(t) \cdot m_v(t) = (1-t)^{-\alpha}(1-t)^{-\beta} = (1-t)^{-(\alpha+\beta)}, \quad t<1$$

Ροπογεννήτρια Γάμμα $(\alpha+\beta, 1)$

Άσκηση 4.9

X_1, X_2 τ.δ. $\sim N(0,1)$

$\left.\begin{array}{l} Y_1 = X_1^2 + X_2^2 \\ Y_2 = X_2 \end{array}\right\}$ να βρεθεί η από κοινού.

ΛΥΣΗ

$\left.\begin{array}{l} X_1^2 = Y_1 - X_2^2 = Y_1 - Y_2^2 \\ X_2 = Y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1 = \pm\sqrt{Y_1 - Y_2^2} \\ X_2 = Y_2 \end{array}$ Δεν είναι 1-1.

Όμως στο $T_1 = \{(x_1, x_2) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}\}$

$X_1 = \sqrt{Y_1 - Y_2^2}$

$X_2 = Y_2$

και στο $T_2 = \{(x_1, x_2) \in (-\infty, 0) \times \mathbb{R}\}$

$X_1 = -\sqrt{Y_1 - Y_2^2}$

$X_2 = Y_2$

είναι "1-1"

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1 X_2}\left(\sqrt{y_1 - y_2^2}, y_2\right) \cdot |J_1| + f_{X_1 X_2}\left(-\sqrt{y_1 - y_2^2}, y_2\right) |J_2|$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(y_1 - y_2^2)^{-1/2} & \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(y_1 - y_2^2)^{-1/2}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(y_1 - y_2^2)^{-1/2} & \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(y_1 - y_2^2)^{-1/2}$$

$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (2\pi)^{-1} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}$ $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$

$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = (2\pi)^{-1} e^{-\frac{y_1}{2}} (y_1 - y_2^2)^{-1/2}$ $y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 > y_2^2$

Άσκηση 4.10

X_1, X_2 ανεξ. τ.μ. με $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

να βρεθεί

i) $U = \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ ii) V

$V = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}$

iii) έχουν οι τ.μ. $2X_1X_2$, $X_2^2 - X_1^2$ την ίδια κατανομή;

ΛΥΣΗ

iii) 2 τ.μ. έχουν ίδιες κατανομές αν οι κατανομές έχουν το ίδιο Π.Ο.

Η $2X_1X_2$ παίρνει τιμές στο $(0, +\infty)$
ενώ η $X_2^2 - X_1^2$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$

Άρα οι 2 τ.μ. δεν μπορούν να έχουν την ίδια κατανομή

i) $x_1 = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$

$\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}} = u+v \Rightarrow \frac{2x_2}{\sqrt{2}} = u+v \Rightarrow x_2 = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$

$$J = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}u}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{4} e^{-\frac{u}{\sqrt{2}}}$$

$$(u,v) \in S = \left\{ (u,v) : \begin{array}{ll} \frac{u-v}{\sqrt{2}} \geq 0 & , \frac{u+v}{\sqrt{2}} \geq 0 \\ u \geq 0 & , v \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$f_V(v) = \int \frac{1}{4} e^{-\frac{u}{2}} \, du$$

$$\left.\begin{array}{l} u \geq v \\ u \geq -v \\ u \geq 0 \\ v \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \max\{-v, v, 0\} \leq u \\ v \in \mathbb{R}, \ u \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} \int_{-v}^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{u}{\sqrt{2}}} \, du = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{\frac{v}{\sqrt{2}}} & , v < 0 \\ \int_{v}^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{u}{\sqrt{2}}} \, du = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{v}{\sqrt{2}}} & , v \geq 0 \end{cases}$$

Άσκηση 4,14

Αν X, Y ανεξάρτητες με $N(0,1)$
Να βρεθούν οι κατανομές των (U,V), U, V όταν

$U = X + Y$
$V = X - Y$
και να δείξετε ότι είναι ανεξ.

ΛΥΣΗ

X, Y ανεξάρτητες $N(0,1)$

Άρα το $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Ισχύει $A \cdot Z \sim N(A\mu, A\Sigma A^T)$

$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+Y \\ X-Y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

άρα $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+Y \\ X-Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

Επομένως:

$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim N_2\left(A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) \equiv N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$

Άρα $U \sim N(0,2)$

$V \sim N(0,2)$

ΑΣΚΗΣΗ 4.15 (Η\ω)

$X, Y \sim N(0,1)$

$U = \frac{X}{Y}$, $V = |Y|$

$(u,v) = ?$

$f_U(u) = \left[\pi(u^2+1)\right]^{-1} \quad u \in \mathbb{R}$